5 Elektrische Netzwerke

Die Theorie der elektrischen Netzwerke behandelt die Beziehung zwischen U und I in Schaltungen die aus konzentrierten Bauelementen bestehen.

Netzwerkanalyse Untersuchung des Verhaltens einer gegebenen Schaltung

Netzwerksynthese Finden einer Schaltung mit vorgegebenem Verhalten

5.1 Netzwerktopologie

Elektrisches Netzwerk: Zusammenschaltung konzentrierter Stromkreiselemente über widerstandslos gedachte Leitungen ($\rightarrow$ Ersatzschaltungen mit angepaßten Idealisierungen für die realen Stromkreiselemente)

Zweig: Jeder Teil eines Netzwerkes, der als Zweipol (oder als Tor eines Mehrpols) aufgefaßt werden kann und der aus einem idealen Stromkreiselement besteht oder aus einer Kombination mehrerer.

Knoten: Anschlußpunkt (Pol) eines Zweiges oder der Verbindungspunkt mehrerer Zweige.

Netzwerktopologie: Erfassung der abstrakten Struktur eines Netzwerkes unter Verwendung von Zweigen und Knoten

Graph eines Netzwerkes: graphische Darstellung der Struktur eines Netzwerkes, wobei Zweige durch Kurvenstücke und Knoten durch Randpunkte der Kurvenstücke dargestellt werden. Es kommt auf die Art der Zusammenschaltung der Stromkreiselemente an nicht auf die Art der Stromkreiselemente.

Orientierter Graph: ist ein Graph bei dem jeder Zweig eine innere Orientierung ($\rightarrow$ Durchlaufsinn) hat. Der Durchlaufsinn ist später der Bezugssinn für Zweigströme und Zweigspannungen.

Inzidenz[1]

Ein Zweig ist mit einem Knoten inzident, wenn der Zweig in dem Knoten beginnt oder endet.

Orientierte Graphen können i.a. Parallelzweige einthalten. (2 oder mehrere Zweige besitzen, die gleichen Knoten als Randpunkte, unabhängig von Orientierungen)

---

[1]

Inzidenz [zu lat. incidere – begegnen, befallen] (Quelle: Brockhaus)

Finanzwissenschaft: die Gesamtheit der Wirkungen einer finanzpolitischen Maßnahme

Budgetinzidenz:

1. Wem nützt die öffentliche Leistung
2. Wer wird duch die Maßnahme belastet
3. Nettoeffekt?

Mathematik: Bezeichnung für das Vorliegen eines nicht leeren Durchschnittes zweier Punktmengen. Z.B.: statt Punkt P liegt auf Geraden g: P inzidiert mit g.

Inzidenzmusik: Musik im Schauspiel mit direktem Bezug zur Handlungssituation (Fanfare, Marsch, Tanz, ...)($\rightarrow$ Bühnenmusik)

Schlinge: Orientierte Graphen können i.a. Schlingen enthalten, das sind Zweige die im selben Knoten beginnen u. enden; hier wird aber meist Schlingenfreiheit vorausgesetzt!

Zusammenhängender Graph: jeder Knoten ist von einem anderen Knoten aus über eine Folge anschließender Zweige erreichbar.

Komponente: Jeder nicht zusammenhängende Graph besteht aus Komponenten, die jede für sich ein zusammenhängender Graph ist.

Planarer oder ebener Graph: der Graph läßt sich auf einer Ebene oder Kugel ohne Kreuzungen zeichnen.

Spezielle Teilgraphen:

1. Schleife: zusammenhängende Folge von Zweigen, die einen geschlossenen Umlauf bilden.
2. Pfad: Schleife aus der ein beliebiger Zweig entfernt wurde.
3. Baum: ein zusammenhängender Teilgraph, der zwar alle Knoten enthält, aber keine Schleifen.

Baumzweig: Zweig eines Baumes

- Ein Graph ist dann und nur dann ein Baum, wenn es genau einen Pfad zwischen jedem Knotenpaar gibt.
- Jeder zusammenhängende Graph enthält mindestens einen Baum.
- Ein Baum mit k-Knoten besteht aus $k-1$ Baumzweigen

Verbindungszweig oder Sehne: Ist in einem Graph ein Baum festgelegt, so nennen wir einen Zweig aus G, der nicht im Baum enthalten ist, Verbindungszweig oder Sehne.

Elementarschleife oder Masche: Schleife, die genau einen Verbindungszweig und einen oder mehrere Baumzweige enthält. Es gibt $m = z - k + 1$ Maschen

Schleifenbasis: Alle Maschen eines Graphen bilden die Schleifenbasis. Jede beliebige Schleife des Graphen läßt sich als Linearkombination der Maschen einer Schleifenbasis darstellen.

Schnittmenge (Trennbündel): Teilmenge von Zweigen eines zusammenhängenden Graphen, deren gleichzeitiges Eliminieren notwendig und hinreichend für den Zerfall des Graphen in zwei Komponenten ist.

Elementare Schnittmenge oder Schnitt: Schnittmenge die genau einen Baumzweig enthält. Es gibt immer $k-1$ Schnitte. $\rightarrow$ Jede Schnittmenge eines Graphen läßt sich als Linearkombination der elementaren Schnittmengen darstellen.

Für orientierte, zusammenhängende schlingenfreie Graphen gilt:

(Sinngemäß gilt dies auch für jede Komponente eines nicht zusammenhängenden Graphen.)

$k =$ Anzahl der Knoten

$z =$ Anzahl der Zweige

$n =$ Anzahl der Baumzweige; Anzahl der elementaren Schnittmengen (Schnitte) einer Schnittmengenbasis

$m =$ Anzahl der Verbindungszweige (Sehnen); Anzahl der Elementarschleifen (Maschen) einer Schleifenbasis

$$\boxed{\text{n=k-1}}, \qquad \boxed{\text{m=z-n}} \tag{1}$$

Konvention:

Nach dem Festlegen eines Baums im orientierten Graphen werden

1. zuerst die Verbindungszweige mit den Zahlen von 1 bis m und dann die Baumzweige mit den Zahlen $m+1$ bis z numeriert.
2. Jede Elementarschleife bekommt die innere Orientierung (Umlaufsinn) und die Nummer ihres Verbindungszweiges. (Jede Elementarschleife enthält genau einen Verbindungszweig.)
3. Jede elementare Schnittmenge enthält genau einen Baumzweig. Die Numerierung $1, 2, \ldots n$ der elementaren Schnittmengen erfolgt entsprechend der Numerierung $m+1, m+2, \ldots z$ ihrer Baumzweige.

A_V **Erweiterte Inzidenzmatrix = vollständige (Knoten-Zweig)-Inzidenzmatrix:**

$k * z$ -Matrix

$$A_{i\zeta} = \begin{cases} +1, & \text{wenn der Zweig } \zeta \text{ vom Knoten } i \text{ wegführt,} \\ -1, & \text{wenn der Zweig } \zeta \text{ zum Knoten } i \text{ hinführt,} \\ 0, & \text{wenn der Zweig } \zeta \text{ mit dem Knoten } i \text{ nicht inzident ist.} \end{cases} \tag{2}$$

Jede Spalte der vollständigen Inzidenzmatrix enthält eine 1, eine -1 und sonst nur 0en. $\rightarrow$ Der Rang der vollständigen Inzidenzmatrix ist $n = k - 1$.

Referenzknoten: beliebiger Knoten; eliminiert man die zugehörige Zeile in der vollständigen Inzidenzmatrix, so erhält man die $\rightarrow$ reduzierte Inzidenzmatrix.

A **Reduzierte (Knoten-Zweig) Inzidenzmatrix:**

$(k-1) * z = n * z$ -Matrix

M **Maschenmatrix = Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix:**

$m * z$ -Matrix

$$M_{i\zeta} = \begin{cases} +1, & \text{wenn der Zweig } \zeta \text{ ist in der Masche } i \text{ mit gleicher Orientierung enthalten,} \\ -1, & \text{wenn der Zweig } \zeta \text{ ist in der Masche } i \text{ mit entgegengesetzter Orientierung enthalten,} \\ 0, & \text{wenn der Zweig } \zeta \text{ ist in der Masche } i \text{ nicht enthalten.} \end{cases} \tag{5}$$

Bei konventionskonformer Vorgangsweise gilt:

$$M = [E, M_B] \qquad E \ldots m * m \text{ -Einsmatrix} \tag{7}$$

M_B **Maschen-Baumzweig-Inzidenzmatrix:**

$m * n$ -Matrix

S **Schnittmatrix = Schnittzweig-Inzidenzmatrix:**

$n * z$ -Matrix

$$S_{i\zeta} = \begin{cases} +1, & \text{wenn der Zweig } \zeta \text{ ist im Schnitt } i \text{ mit gleicher Orientierung enthalten,} \\ -1, & \text{wenn der Zweig } \zeta \text{ ist im Schnitt } i \text{ mit entgegengesetzter Orientierung enthalten,} \\ 0, & \text{wenn der Zweig } \zeta \text{ ist im Schnitt } i \text{ nicht enthalten.} \end{cases} \tag{8}$$

$$S = [S_V, E] \qquad E \ldots n * n \text{ -Einsmatrix} \tag{10}$$

S_V **Schnitt-Verbindungszweig-Inzidenzmatrix**

$n * m$ -Matrix

Enthält die Masche i den Baumzweig $m + j$ mit gleicher Orientierung (mit entgegengesetzter O.)[nicht], so ist der Verbindungszweig i im Schnitt j mit entgegengesetzter Orientierung (mit gleicher O.)[nicht] enthalten.

$$\boxed{M_B = -S_V^T} \tag{11}$$

$$MS^T = [E, M_B] \begin{bmatrix} S_V^T \\ E \end{bmatrix} = S_V^T + M_B = 0 \tag{13}$$

5.2 Allgemeine Netzwerkgleichungen

Einschränkungen:

- Elektrische Ströme gibt es außerhalb der konzentrierten Schaltkreiselemente nur in den Schaltverbindungen.
- keine erheblichen Überschußladungen in den Schaltverbindungen
- keine Verkettung mit magnetischen Flüssen merkbarer zeitlicher Änderungsrate

i Matrix der Zweigströme

$$i = [i_1, i_2, \ldots i_z]^T \qquad z * 1\text{-Matrix} \tag{14}$$

$$\boxed{\text{Ai=0}} \qquad \boxed{\text{Si=0}} \qquad \text{div}\vec{D} = 0 \tag{15}$$

i_V Verbindungszweigstrommatrix

$$i = [i_1, i_2, \ldots i_m]^T \qquad m * 1\text{-Matrix} \tag{17}$$

i_B Baumszweigstrommatrix

$$i = [i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots i_z]^T \qquad n * 1\text{-Matrix}$$

$$Si = [S_V, E] \begin{bmatrix} i_V \\ i_B \end{bmatrix} = S_V i_V + i_B = 0$$

$$i_B = -S_V i_V = M_B^T i_V \tag{18}$$

Die Baumzweigströme sind aus den Verbindungszweigströmen ableitbar!

$$\boxed{i = M^T i_V} \tag{19}$$

u Matrix der Zweigspannungen

$$u = [u_1, u_2, \ldots u_z]^T \qquad z * 1\text{-Matrix} \tag{20}$$

$$\boxed{\text{Mu=0}} \qquad \text{rot}\vec{E} = \vec{0} \tag{21}$$

u_V Verbindungszweigspannungen

$$u_V = [u_1, u_2, \ldots u_m]^T \qquad m * 1\text{-Matrix} \tag{22}$$

u_B Baumzweigspannungen

$$u_B = [u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots u_z]^T \qquad n * 1\text{-Matrix}$$

$$Mu = [E, M_B] \begin{bmatrix} u_V \\ u_B \end{bmatrix} = u_V + M_B u_B = 0 \tag{23}$$

$$u_V = -M_B u_B = S_V^T u_B$$

Die Verbindungszweigspannungen sind aus den Baumzweigspannungen ableitbar!

$$u = \begin{bmatrix} u_V \\ u_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_V^T \\ E \end{bmatrix} u_B = [S_V, E]^T u_B = S^T u_B$$

$$\boxed{u = S^T u_B} \tag{24}$$

Vollständige Bestimmung der Strom- und Spannungsverhältnisse im Netzwerk

$$\left.\begin{array}{ll} i = M^T i_V & m \text{ lin. unabh. Gl.} \\ u = S^T u_B & n = k-1 \text{ lin. unabh. Gl.} \end{array}\right\} \text{m+n=z linear unabhängige Gleichungen}$$

Es sind aber z-Zweigströme und z-Zweigspannungen , d.h. $2z$ Unbekannte zu berechnen! → Es werden noch die z-Zweiggleichungen, die Verknüpfungen zwischen den Zweigströmen und den jeweiligen Zweigspannungen benötigt.

u_K Knotenspannungsmatrix

$n * 1$ -Matrix

Knotenspannungen der $n = k - 1$ Knoten gegenüber dem Referenzknoten.

$$\boxed{u = A^T u_k} \tag{26}$$

Satz von Tellegen

$$\boxed{u^T i' = 0} \tag{27}$$

Erfüllt ein System von Zweigspannungen für sich die Maschengleichungen und ein System von Zweigströmen für sich die Schnittgleichungen (Knotengleichungen), und gilt einheitlich das Verbraucherbezugssystem (od. einheitlich das Erzeugerbezugssystem), so ist das Produkt der Zweigströme mit den Zweigspannungen summiert über alle Zweige gleich Null.

Da die Maschen- und Schnittgleichungen eines Netzwerkes jeweils ein lineares algebraisches Gleichungssystem mit konstanten Koeffizienten sind folgt: Gelten die Gleichungen für ein System von u und i, dann gelten sie auch für die Fourier- oder Laplace-Transformierten U bzw. I und die komplexen Grössen in Wechselstromnetzwerken.

Leistungsbilanz

Stellen u und $i' = i$ die in einem Netzwerk zu einem bestimmten Zeitpunkt tatsächlich vorhandenen Zweig-Us und Zweig-Is dar, so beschreibt der Satz von Tellegen die Leistungsbilanz des abgeschlossenen physikalischen Systems. → Die Summe aller Zweigleistungen ist Null (vorausgesetzt: einheitliches Bezugssystem).

Annahme: Das Netzwerk ist über t-Tore (Anschlußpaare) mit seiner Umgebung verbunden.

$$p = -\sum_{\zeta=1}^{t} u_\zeta i_\zeta = \sum_{\zeta=t+1}^{z} u_\zeta i_\zeta \tag{29}$$

$i_1, i_2, \ldots i_t$	Torzweigströme
$i_{t+1}, i_{t+2}, \ldots i_z$	restliche Zweigströme

→ Die über die Tore zugeführte Momentanleistung wird von den restlichen Zweigen aufgenommen. In der komplexen Wechselstromrechnung gilt für die komplexe Scheinleistung:

$$S = \sum_{\zeta=t+1}^{z} U_\zeta I_\zeta^* \tag{30}$$

5.3 Zweiggleichungen

Für die vollständige Netzwerkanalyse müssen außer der Netzwerktopologie noch die Zusammenhänge zwischen Zweig-Is und Zweig-Us bekannt sein.

Bei der Wahl der Zweige ist darauf zu achten, daß jede ideale U-Quelle noch ein anderes Element in Reihe und jede ideale I-Quelle noch ein anderes Element parallel dazu erhält.

Die Zweiggleichungen sind im allgemeinen DGLs. Bei LTI-Systemen kann mit Fourier-, Laplace-Transformation oder Untersuchung des eingeschwungenen Zustandes im Rahmen der komplexen Wechselstromrechnung sofort zu algebraischen Gleichungen übergegangen werden.

Definition der $z*1$-Matrizen der Zweigspannungen, Zweigströme, Quellenspannungen und Quellenströme:

$$\begin{array}{ll} U = [U_1, U_2, \ldots U_z]^T & U = [U_{q1}, U_{q2}, \ldots U_{qz}]^T \\ I = [I_1, I_2, \ldots I_z]^T & I = [I_{q1}, I_{q2}, \ldots I_{qz}]^T \end{array} \tag{33}$$

$$\begin{array}{ll} Z & \text{Zweigimpedanzmatrix} \\ Y = Z^{-1} & \text{Zweigadmittanzmatrix} \end{array}$$

Zweiggleichungen unter Verwendung dieser Matrizen:

$$U = Z(I - I_q) + U_q \qquad I = Y(U - U_q) + I_q \tag{36}$$