Lineares dynamisches System

Eingangsgrößen →	**System** **Zustandsgrößen:** innere variable Größen $x_1(\tau_0), \ldots, x_n(\tau_0)$ **Bestimmungsgrößen:** Elementeparameter, Werte der Ls, Cs u. Rs	→ Ausgangsgrößen

Sind die Bestimmungsgrößen konstant → LTI-System (lineares zeitinvariantes System, genauere Def. später).

Eingangsgröße: von außen eingeprägt, deterministisches Signal (dem idealen deterministischen Signal ist im realen System ein "zufälliges" Rauschen überlagert).

Ausgangsgröße: der Zeitverlauf ist im Prinzip meßtechnisch erfaßbar (kontinuierlich od. in einer Reihe diskreter Zeitpunkte = zeitdiskrete od. abgetastete Größe).

Anfangsbedingungen: vollständige Information über den Zustand des Systems zum Anfangszeitpunkt.

Bezogene Größen

$$\begin{aligned}
u(\tau) &= \frac{u_E(\tau T_B)}{U_{EB}} && \text{bezogene Eingangsvariable} \\
y(\tau) &= \frac{u_A(\tau T_B)}{U_{AB}} && \text{bezogene Ausgangsvariable} \\
\tau &= \frac{t}{T_B} && \text{bezogene Zeitvariable} \\
t &= T_B \tau \rightarrow \mathrm{d}t = T_B \mathrm{d}\tau
\end{aligned} \tag{1}$$

Bezugswert:
- charakteristische Größe z.B.: maximal- oder stationärer Wert der Größe
- Zeitkonstante oder Periodendauer

BEZOGENE GRÖSSEN HABEN DIE PHYSIKALISCHE DIMENSION EINS!

Nullzustandsantwort: die Zustände der im System enthaltenen Energiespeicher (Spulenströme u. Kondensatorspannungen) sind Null → Nullzustand. Der Zeitverlauf der (bezogenen) Ausgangsgröße als Reaktion auf die Eingangsgröße heißt dann Nullzustandsantwort $y_{0Z}(\tau)$.

Nulleingangsantwort: der Zeitverlauf der (bezogenen) Ausgangsgröße, ausgehend von irgend einem bestimmten Zustand des Systems, wobei während des ganzen Vorgangs die Eingangsgröße $u(\tau)$ den Wert Null hat.

$$x = x(\tau) \qquad \text{bezogene Zustandsgröße}$$

z.B.: Zustand des Systems zum Anfangszeitpunkt τ_0:

$$x_1(\tau_0), x_2(\tau_0), \ldots, x_n(\tau_0)$$

Vollständige Antwort eines linearen Systems

$$y(\tau) = y_{0E}(\tau) + y_{0Z}(\tau) \tag{3}$$

Bedingungen für die Linearität eines Systems

1. Additivität von Nulleingangs- und Nullzustandsantwort

$$y(\tau) = y_{0E}(\tau) + y_{0Z}(\tau)$$

2. Linearität der Nulleingangsantwort bezüglich des Anfangszustandes

$$\begin{aligned}
&x_{11}(\tau_0), x_{12}(\tau_0), \ldots, x_{1n}(\tau_0) \rightarrow y_{0E1}(\tau)\\
&x_{21}(\tau_0), x_{22}(\tau_0), \ldots, x_{2n}(\tau_0) \rightarrow y_{0E2}(\tau)\\
&\alpha_1 x_{11}(\tau_0) + \alpha_2 x_{21}(\tau_0), \alpha_1 x_{12}(\tau_0) + \alpha_2 x_{22}(\tau_0), \ldots \alpha_1 x_{1n}(\tau_0) + \alpha_2 x_{2n}(\tau_0)\\
&\rightarrow y_{0E}(\tau) = \alpha_1 y_{0E1}(\tau) + \alpha_2 y_{0E2}(\tau)
\end{aligned}$$

3. Linearität der Nullzustandsantwort bezüglich der Eingangsfunktion

$$u_1(\tau) \rightarrow y_{0Z1}(\tau)$$

$$u_2(\tau) \rightarrow y_{0Z2}(\tau)$$

$$(\alpha_1 u_1(\tau) + \alpha_2 u_2(\tau)) \rightarrow (\alpha_1 y_{0Z1} + \alpha_2 y_{0Z2})$$

Lineare Beziehung $L : x \rightarrow y = L(x)$

Die Beziehung L, (sie ordnet irgendwelchen Größenwerten oder Funktionen x den Größenwert od. die Funktion y zu), ist linear, wenn 2 Bedingungen erfüllt sind:

1. Additivität: $L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2)$ vorausgesetzt: x_1, x_2 und $(x_1 + x_2)$ liegen im Definitionsbereich von L.

2. Homogenität: $L(\alpha x) = \alpha L(x)$ vorausgesetzt α ist skalar und x und (αx) liegen im Definitionsbereich von L.

Das Superpositionsprinzip

Ist die Eingangsfunktion als Linearkombination anderer eingangsfunktionen darstellbar

$$u(\tau) = \sum \alpha_i u_i(\tau), \qquad \tau \geq \tau_0 \tag{4}$$

dann ist die Antwort des **linearen Systems** ebenfalls als Linearkombination der Nullzustandsantworten darstellbar

$$y_{0Z}(\tau) = \sum \alpha_i y_{0Zi}(\tau), \qquad \tau \geq \tau_0 \tag{5}$$

Zeitinvarianz

Eine beliebige Zeitverschiebung des Verlaufs der Eingangsgröße bewirkt die gleiche Verschiebung des Verlaufs der Ausgangsgröße, vorausgesetzt der Anfangszustand wird mitverschoben.

Im zeitinvarianten Modell dürfen die Parameter (R, L, C) nicht explizit von einer absoluten Zeitvariablen abhängen!

Faltungssumme

$$y_{0Z}^T(k) = \sum_{k'=0}^{k-1} g^T(k-k')u^T(k') = \sum_{k'=1}^{k} g^T(k')u^T(k-k') \tag{10}$$

$$y_{0Z}^T(1) = g^T(1)u^T(0)$$

$$y_{0Z}^T(2) = g^T(2)u^T(0) + g^T(1)u^T(1)$$

$$y_{0Z}^T(k) = g^T(k)u^T(0) + g^T(k-1)u^T(1) + g^T(k-2)u^T(2) + \ldots + g^T(1)u^T(k-1)$$

Diskrete vollständige Antwort linearer Systeme:

$$y^T(k) = y_{0E}^T(k) + y_{0Z}^T(k) \tag{11}$$

$$y_{0Z}^T(k) = \sum_{k'=-\infty}^{k-1} g^T(k-k')u^T(k') = \underbrace{\sum_{k'=-\infty}^{-1} g^T(k-k')u^T(k')}_{y_{0E}^T(\tau)} + \underbrace{\sum_{k'=0}^{k-1} g^T(k-k')u^T(k')}_{y_{0Z}^T(\tau)} \tag{12}$$

Faltungsintegral

Einzelimpulse die hinreichend kurz sind erzeugen unabhängig von ihrem zeitlichen Verlauf die immer gleiche Systemantwort, wenn die Zeitsumme (das Zeitintegral) des Impulses immer gleich ist.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{0-}^{0+} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = 1 \tag{14}$$

Definition der δ-Distribution $\delta(\tau)$ auch Deltaimpuls, Diracimpuls oder Diracstoß genannt.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau-\tau')\mathrm{d}\tau = f(\tau') \tag{15}$$

Abtasteigenschaft des δ-Impulses

Faltungsintegral

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} g(\tau-\tau')u(\tau')\mathrm{d}\tau' = \int_{0}^{\infty} g(\tau')u(\tau-\tau')\mathrm{d}\tau' \tag{16}$$

Beziehung zwischen diskreter Impulsantwort und Stoßantwort

$$g^T(k) = \int_0^{\frac{T}{T_B}} g(k\frac{T}{T_B} - \tau')\mathrm{d}\tau' = \int_{(k-1)\frac{T}{T_B}}^{k\frac{T}{T_B}} g(\tau')\mathrm{d}\tau' \tag{19}$$

Die Sprungantwort

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau) &= \begin{cases} 0, & \text{für } \tau < 0 \\ 1, & \text{für } \tau > 0 \end{cases} \qquad \text{Heaviside-Sprung} \\ \varepsilon(\tau - \tau_0) &= \begin{cases} 0, & \text{für } \tau < \tau_0 \\ 1, & \text{für } \tau > \tau_0 \end{cases} \end{aligned} \tag{21}$$

$$\varepsilon(\tau - \tau_0) = \int_{-\infty}^{\tau} \delta(\tau' - \tau_0)\mathrm{d}\tau' \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[\varepsilon(\tau - \tau_0)] = \delta(\tau - \tau_0) \tag{22}$$

$$h(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} g(\tau - \tau')\varepsilon(\tau')\mathrm{d}\tau'$$

Sprungantwort oder Übertragungsfunktion. Da gilt: $\varepsilon(\tau') = 0$ für $-\infty < \tau' < 0$ folgt:

$$h(\tau) = \int_{0}^{\tau} g(\tau - \tau')\mathrm{d}\tau' = \int_{0}^{\tau} g(\tau')\mathrm{d}\tau' \tag{23}$$

Die abgetastete Sprungantwort

$$h^T(k) = \sum_{k'=1}^{k} g^T(k') \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &g^T(k) = h^T(k) - h^T(k-1), \quad \text{für } k \geq 2 \\ &g^T(1) = h^T(1) \end{aligned} \tag{27}$$

Berechnung der Stoßantwort aus der Sprungantwort

$$g(\tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} h(\tau) \tag{29}$$

Voraussetzung dafür ist die Differenzierbarkeit von $h(\tau)$; oft liegt aber im Punkt $\tau = 0$ ein Sprung; die Gleichung ist für experimentelle Systemuntersuchungen nicht gut brauchbar, zwar läßt sich die Sprungantwort in der Regel leicht messen, aber der Differentiatinsprozeß liefert meist ungenaue störungsempfindliche Ergebnisse.